

Title	非等方的平均曲率一定曲面の幾何学的性質と安定性 (部分多様体論とその周辺領域における新しい研究対象と方法)
Author(s)	小磯, 深幸
Citation	数理解析研究所講究録 (2004), 1403: 1-9
Issue Date	2004-11
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/26066">http://hdl.handle.net/2433/26066</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

# 非等方的平均曲率一定曲面の幾何学的性質と安定性

奈良女子大学理学部 小磯 深幸 (Miyuki Koiso)

Department of Mathematics,  
Nara Women's University

## 1 はじめに

$F : S^2 \rightarrow \mathbf{R}^+$  を 2 次元球面  $S^2$  上で定義された正値  $C^\infty$  級関数とする.  $X : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を, 向き付け可能な 2 次元可微分多様体  $\Sigma$  から  $\mathbf{R}^3$  の中へのはめ込みとし, そのガウス写像を  $\nu : \Sigma \rightarrow S^2$  とする. 汎関数  $\mathcal{F}_{\Lambda_0}(X)$  を

$$\mathcal{F}_{\Lambda_0}(X) = \int_{\Sigma} F(\nu) d\Sigma + \Lambda_0 V(X), \quad \Lambda_0 \in \mathbf{R} \quad (1)$$

によって定義する. ただしここで,  $d\Sigma$  は  $X$  により誘導される  $\Sigma$  の面積要素であり,  $V(X)$  は  $X$  が「囲む」3次元の代数的体積

$$V(X) := (1/3) \int_{\Sigma} \langle X, \nu \rangle d\Sigma$$

である.  $\mathcal{F}_0(X)$  は非等方的表面エネルギーのモデルとして用いられ, 「 $V = \text{一定}$ 」なる条件のもとでの  $\mathcal{F}_0(X)$  の臨界点の研究には結晶学や冶金学を始めとする物理学のさまざまな分野への応用がある. さて, 以下では, 関数  $F$  に対して「凸性」を仮定する. すなわち,  $F$  の  $S^2$  上での勾配とヘシアンをそれぞれ  $DF$ ,  $D^2F$  で表したとき,  $S^2$  の各点において  $D^2F + F1$  が正定値であると仮定する. 汎関数  $\mathcal{F}_{\Lambda_0}$  は「(定数係数) parametric elliptic functional」と呼ばれ (cf. [3], [4]), 特に幾何学的測度論や凸解析の観点からの研究がなされてきたが, 微分幾何学的な観点からの研究は, まだ十分になされているとは言えない.

さて,  $\mathbf{R}^3$  での平行移動により  $DF$  は  $X$  に沿う滑らかな接ベクトル場と見なせる. このとき, 汎関数  $\mathcal{F}_{\Lambda_0}$  に対する Euler-Lagrange 方程式は

$$0 = \operatorname{div}_{\Sigma} DF - 2HF + \Lambda_0 =: -\Lambda + \Lambda_0 \quad (2)$$

となる. ただしここで,  $H$  は  $X$  の平均曲率を表す.  $\Lambda$  を  $X$  の「非等方的平均曲率」と呼び,  $\Lambda$  が至る所定数である時,  $X$  を「非等方的平均曲率一定曲面」と呼ぶことにする. 平均曲率一定曲面は, 非等方的平均曲率一定曲面の特別な場合 ( $F \equiv 1$ ) である. 非等方的平均曲率一定曲面  $X$  について,  $V$  を保ちコンパクトな台 (support) を持つ任意の変分に対して  $\mathcal{F}_0$  の第 2 変分が非負である時「 $X$  は安定である」という.

$F$  の「凸性」から, Euler-Lagrange 方程式 (2) は楕円型となり, 最大値の原理の類似が成立する. また,  $G(\nu) = DF(\nu) + F(\nu)\nu$  によって定義される埋め込み  $G : S^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  は  $\mathbf{R}^3$

の凸閉曲面を定義するが、これは Wulff シェイプと呼ばれている。Wulff シェイプは、体積が  $(1/3) \int_{S^2} F dS^2$  の閉曲面全体の中で汎関数  $\mathcal{F}_0$  の最小値を与える（したがって、安定である）ことが知られている。より詳しくは、任意に与えられた体積をもつ閉曲面全体の中で汎関数  $\mathcal{F}_0$  の最小値を与えるものが  $(\mathbf{R}^3$  の平行移動を除き) 一意的に存在して、それは  $(\mathbf{R}^3$  の平行移動と相似変換を除き) Wulff シェイプと一致する (ウルフの定理, [11])。さらに、 $\Lambda \neq 0$  に対し、コンパクトで境界のない安定な非等方的平均曲率一定曲面は (平行移動と相似変換を除き) Wulff シェイプとなることが知られている ([10])。なお、平均曲率一定曲面 ( $F \equiv 1$ ) の場合は、Wulff シェイプは半径 1 の球面である。

本講においては、非等方的平均曲率一定曲面について最近得られた結果のうち、安定性に関するものとガウス写像に関連するものを中心に紹介する。第 2 節では安定な完備非等方的平均曲率一定曲面の一意性定理を紹介する。第 3 節では、ガウス写像の除外集合の性質による非等方的平均曲率一定曲面の大域的性質の決定に関連する結果を述べる。第 4 節では、非等方的平均曲率一定回転面の分類及び表現公式を紹介する。最後に第 5 節では、平行な 2 平面上に自由境界をもつ安定な非等方的平均曲率一定曲面の決定に関する結果を述べる。なお、以下に述べる結果のいくつかは、平均曲率一定曲面に対する結果としても新しいものである。

本研究は Bennett Palmer 氏 (米国, Idaho 州立大学) との共同研究 ([6], [7]) である。

## 2 完備非等方的平均曲率一定曲面の安定性

まず、完備非等方的平均曲率一定曲面の例をあげよう。

例 2.1.  $F = \sqrt{a^2\nu_1^2 + b^2\nu_2^2 + c^2\nu_3^2}$  に対する Wulff シェイプは楕円面  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$  である。変換  $x' = x/a, y' = y/b, z' = z/c$  を施すことにより、 $\mathcal{F}_0$  は面積の  $abc$  倍となる。したがって、はめ込み  $X = (x, y, z)$  が  $\mathcal{F}_{\Lambda_0}$  の臨界点であるのは  $(x', y', z')$  が平均曲率一定である時かつその時に限る。

さて今、

$$\sigma := \min_{\nu \in S^2} \min_{\xi \in T_\nu S^2, |\xi|=1} \langle (D^2 F + F1)|_\nu \xi, \xi \rangle, \quad \tau := \max_{\nu \in S^2} \max_{\xi \in T_\nu S^2, |\xi|=1} \langle (D^2 F + F1)|_\nu \xi, \xi \rangle.$$

とおく。次の結果は、汎関数  $\mathcal{F}_0$  が面積汎関数に「近い」とときには、完備で安定な非等方的平均曲率一定曲面は、本質的には Wulff シェイプのみであるということを示している ([6])。この結果は、平均曲率一定曲面に対してはよく知られている ([2], [9], [8])のものであり、実際、証明は [2], [8] と本質的には同様にし得られる。

**Theorem 2.1**  $2\sigma/\tau \geq 1$  と仮定し、 $X : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を完備な非等方的平均曲率一定曲面とする。この時、 $X$  の Morse index が有限であるのは、 $\Sigma$  がコンパクトである時かつその時に限る。したがって特に、 $X$  が安定ならば、 $X(\Sigma)$  は (平行移動と相似変換を除き) Wulff シェイプと一致する。

### 3 ガウス写像

$\mathbf{R}^3$  へのはめ込み  $X: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が平均曲率一定であることと  $X$  のガウス写像が  $S^2$  の中への調和写像であることは同値である。このことから、ガウス写像の性質が平均曲率一定曲面の大域的な性質をある程度決定することが予想される。特に、「ガウス写像の像が特別な領域に含まれるという性質が曲面の性質を決定する」ことが予想されるが、この方面での注目すべき結果としては、Hoffman-Osserman-Schoen [5] による「平均曲率一定曲面  $X$  のガウス写像による像が開半球面に含まれるならば、 $X$  は平坦である」という結果がある。以下では、これを動機付けとした研究により [6] において得られた結果を述べる。

さて今、 $X: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を非等方的平均曲率一定曲面とする。 $\sigma$  と  $\tau$  を第 2 節で定義した定数であるとする、長さ 1 の任意の接ベクトル  $\xi$  に対して

$$0 < \sigma \leq \langle A\xi, \xi \rangle \leq \tau < \infty \quad (3)$$

が成立する。 $X$  のガウス写像  $\nu$  が  $\nu(\Sigma) \subset S^2 \setminus \{\pm E_3\}$  ( $E_3 := (0, 0, 1)$ ) を満たすとき、多価関数  $\alpha := \arg(\nu_1 + i\nu_2)$  を考える。1 点  $p_0 \in \Sigma$  を固定し、(多価かもしれない) 関数  $\hat{\alpha}$  を

$$\hat{\alpha}(p) := \int_{p_0}^p \nu^* d\alpha$$

によって定義する。ただしここで、積分は  $p_0$  から  $p$  に至る任意の曲線に沿って行うものとする。以下においては、 $\hat{\alpha}$  は  $\Sigma$  のある部分集合上で有界であるような場合について考える。この時  $\hat{\alpha}$  は一価である。また、 $X$  のガウス曲率を  $K$  で表す。

**Theorem 3.1** 以下の性質を満たす定数  $c = c(b - a, \tau\sigma^{-1})$  が存在する： $X: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を非等方的平均曲率一定  $= \Lambda$  の等角はめ込みとし、対応する *parametric elliptic functional* は (3) を満たすとする。 $X$  のガウス写像の像  $\Omega$  は

$$1 > M := \sup_{\Omega} \nu_3^2 \quad (4)$$

を満たすとする。この時、相対コンパクト領域  $U_0 \subset U \subset \Sigma$  であって、 $U$  上

$$-\infty < a < \hat{\alpha} < b < \infty \quad (5)$$

なるものに対し、

$$\int_{U_0} |K| d\Sigma \leq \frac{cM^{1/2}}{(1-M)^{3/4}} \left\{ \frac{1}{\mu(U_0, U)} \inf_{U_0 \subset V \subset U} \left( \frac{1}{\mu(U_0, V)} + \frac{1}{\mu(V, U)} \right) \right\}^{1/2} \quad (6)$$

が成立する。

この定理やその証明のアイデア等を本質的に用いることにより、Bernstein type の定理をはじめとする非等方的平均曲率一定曲面に対する一意性定理や平均曲率一定曲面の安定性に関する結果等が得られる。以下に、それらのうちのいくつかを紹介する。

**Corollary 3.1**  $\Omega$  を  $S^2$  の領域であって、その閉包が  $S^2 \setminus \{\pm E_3\}$  に含まれるものとする。また、 $\Omega$  の任意の閉曲線の  $-E_3$  に対する回転指数は 0 であると仮定する。すると、 $\Omega$  上で一価の連続関数

$$\alpha := \arctan(\nu_2/\nu_1) = \arg(\nu_1 + i\nu_2)$$

が定義され、ある定数  $a, b$  に対して

$$-\infty < a < \alpha < b < \infty. \quad (7)$$

が成立する.

$$1 > M := \sup_{\Omega} \nu_3^2. \quad (8)$$

とおく. この時, 定数  $c = c(b - a, \tau\sigma^{-1})$  が存在して, 以下の性質を満たす:  $X: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が非等方的平均曲率一定  $= \Lambda$  な等角はめ込みであって, そのガウス写像による像が上記の性質を満たす領域  $\Omega$  に含まれるならば, 任意の相対コンパクト領域  $U_0 \subset U \subset \Sigma$  に対して (6) が成立する.

さて今,  $\Sigma$  を等角計量が与えられたリーマン面とする.  $U_0 \subset U$  は  $\Sigma$  の相対コンパクト領域とし,  $\omega = \omega(U_0, U)$  は  $U \setminus \bar{U}_0$  上の調和関数であって,  $\partial U_0$  上で 1,  $\partial U$  上で 0 となるものとする. この時, 最大値の原理により  $0 \leq \omega = \omega(U_0, U) \leq 1$  が成立する.  $1/\mu(U_0, U) := \int_{U \setminus \bar{U}_0} |\nabla \omega|^2 d\Sigma$  は対  $(U_0, U)$  の等角不変量である.  $\Sigma$  は, exhaustion  $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$  であって  $1/\mu(U_0, U_j) \rightarrow 0$  ( $j \rightarrow \infty$ ) なるものが存在する時に, parabolic であると呼ばれる. この条件は exhaustion の取り方によらない. また, たとえば, コンパクトリーマン面から有限個の点を除いたものは parabolic である.

**Corollary 3.2**  $\Sigma$  は parabolic リーマン面とする.  $X: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  は非等方的平均曲率一定の等角はめ込みとし,  $X$  のガウス写像  $\nu$  による像は  $S^2 \setminus \{\pm E_3\}$  に含まれ,  $\nu$  は (5) を満たすとする. この時,  $X$  は平坦である. より厳密には,  $X(\Sigma)$  は,  $x_3$  軸に平行な平面上の曲線  $C$  上の cylinder  $C \times \mathbf{R}$  である.

また, 平均曲率一定曲面の安定性について次の結果が成立する.

**Corollary 3.3**  $\Omega$  を  $S^2$  の領域であって, その閉包が  $S^2 \setminus \{\pm E_3\}$  に含まれるものとする. また,  $\Omega$  の任意の閉曲線の  $-E_3$  に対する回転指数は 0 であると仮定する. この時, 定数  $c = c(b - a, M)$  が存在して, 以下の性質を満たす: 平均曲率一定のはめ込み  $X: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  であってそのガウス写像の像が  $\Omega$  に含まれるものと, 相対コンパクト領域  $U \subset \Sigma$ , 単連結領域  $U_0 \subset U$  に対し,

$$1/\mu(U_0, U) + \inf_{U_0 \subset V \subset U} \left( \frac{1}{\mu(U_0, V)} + \frac{1}{\mu(V, U)} \right) \leq c \quad (9)$$

が成立するならば,  $U_0$  は強安定である.

さらに, 汎関数  $\mathcal{F}$  が面積汎関数に「近い」とときには, [5] による平均曲率一定曲面に対する Bernstein type の定理の一般化が成立する:

**Theorem 3.2**  $X: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  は完備なリーマン面  $\Sigma$  からの等角はめ込みであって,  $2\sigma/\tau \geq 1$  を満たす parametric elliptic functional に対する非等方的平均曲率一定曲面であるとする. この時,  $X$  のガウス写像の像が閉半球面に含まれるならば,  $X$  は平坦である.

## 4 回転対称な非等方的平均曲率一定曲面

回転対称な非等方的平均曲率一定曲面 (非等方的 Delaunay 曲面と呼ぶ) は, 平均曲率一定回転面 (Delaunay 曲面) と類似の分類がなされる ([6]). 本節においては, 非等方的 Delaunay 曲面の分類及び表現公式 ([6]) について述べる.

以下では  $F: S^2 \rightarrow \mathbf{R}^+$  が一変数関数  $F(\nu) = F(\nu_3)$  ( $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in S^2$ ) であると仮定する.

$\Sigma$  を,  $z$  軸を回転軸とする非等方的平均曲率一定  $\Lambda$  の回転面とすると,  $\Sigma$  は

$$X(s, \theta) = (x(s)e^{i\theta}, z(s)), \quad x \geq 0,$$

と表せる. ただしここで,  $s$  は母線  $(x(s), z(s))$  の弧長である.  $X$  のガウス写像  $\nu$  の向きを適当にとることにより,

$$\nu(s, \theta) = (z'(s) \cos \theta, z'(s) \sin \theta, -x'(s))$$

としてよい. このとき,  $(x(s), z(s))$  は次の微分方程式を満たす.

$$2(1/\mu_2)z'(s)x(s) + \Lambda(x(s))^2 \equiv \text{constant} =: c, \quad \mu_2^{-1} = F - \nu_3 \frac{dF}{d\nu_3} \quad (10)$$

逆に, (10) の解  $(x(s), z(s))$  は非等方的平均曲率一定  $\Lambda$  の回転面を定義する.

必要ならば  $s$  の向きを取り替えることにより,  $\Lambda \leq 0$  と仮定してよい. このとき, (10) の解は完備な回転面を与えるが, それらは次の 6 つの場合に分けられる:

- (I-1)  $\Lambda = 0$  かつ  $c = 0$ : 水平な平面.
- (I-2)  $\Lambda = 0$  かつ  $c \neq 0$ : 非等方的 *catenoid*.
- (II-1)  $\Lambda < 0$  かつ  $c = 0$ : *Wulff* シェイプ (*up to* 鉛直方向の平行移動と相似変換).
- (II-2)  $\Lambda < 0$  かつ  $c = ((\mu_2|_{\nu_3=0})^2 |\Lambda|)^{-1}$ : 円柱.
- (II-3)  $\Lambda < 0$  かつ  $((\mu_2|_{\nu_3=0})^2 |\Lambda|)^{-1} > c > 0$ : 非等方的 *unduloid*.
- (II-4)  $\Lambda < 0$  かつ  $c < 0$ : 非等方的 *nodoid*.

次の Lemma 4.1 により, 上記の命名の理由が説明される:

**Lemma 4.1** (i) 非等方的 *catenoid* の母線  $C$  は  $z$  軸の区間上のグラフである. また  $C$  はただ 1 点において水平面に垂直である.

(ii)  $(x(s), z(s)), (x \geq 0)$ , は非等方的 *unduloid* または非等方的 *nodoid* の母線とする. このとき,  $x$  の極大値  $B$  (bulge と呼ぶ) と極小値  $N$  (neck と呼ぶ) がそれぞれただ 1 つ存在して  $B > N > 0$  である.

(iii) 非等方的 *unduloid* の母線  $C$  は  $z$  軸上の周期的なグラフであり, neck から次の neck (bulge から次の bulge) は 1 周期を与える. したがって,  $C$  は neck と bulge の間にただ 1 つの変曲点  $(x, z)$  をもち, それは  $x = \sqrt{c/(-\Lambda)}$  を満たす.

(iv) 非等方的 *nodoid* の母線  $C$  の曲率は定符号である.  $C$  は自己交差をもつ(鉛直方向の平行移動に関する)周期曲線であり, neck から次の neck (bulge から次の bulge) は 1 周期を与える.

次に、非等方的 Delaunay 曲面に対する表現公式の 1 つを紹介する。

**Proposition 4.1** ([6])  $\mathcal{W}$  は  $F = F(\nu_3)$  に対する Wulff シェイプとし、

$$\sigma \mapsto (u(\sigma), v(\sigma)), \quad \sigma \in (-\infty, \infty)$$

を  $\mathcal{W}$  の母線とする。ただしここで、 $\sigma$  は弧長とする。このとき、

$$\mu_2^{-1} v_\sigma - u = 0, \quad \mu_2^{-1} = F - \nu_3 \frac{dF}{d\nu_3}$$

が成立する。  $X(s, \theta) = (x(s)e^{i\theta}, z(s))$  を非等方的平均曲率一定  $\Lambda \leq 0$  の回転面とし、そのガウス写像は  $\mathcal{W}$  のガウス写像と  $s = s(\sigma)$  において一致するとする。このとき、 $X$  は次で与えられる：

(i)  $X$  が非等方的 catenoid のとき、ある定数  $c$  が存在して

$$x = c/(2u).$$

(ii)  $X$  が非等方的 unduloid のとき、 $\Lambda < 0$  であり、ある定数  $c$  が存在して

$$x = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + \Lambda c}}{-\Lambda}$$

が成り立つ。ここで、 $x = x(u(\sigma))$  は  $\{\sigma | u \geq \sqrt{-\Lambda c}\}$  において定義される。

(iii)  $X$  が非等方的 nodoid のとき、 $\Lambda < 0$  であり、ある定数  $c$  が存在して

$$x = \frac{u + \sqrt{u^2 + \Lambda c}}{-\Lambda}$$

が成り立つ。ここで、 $x = x(u(\sigma))$  は  $\{-\infty < \sigma < \infty\}$  において定義される。

上記のすべての場合において、 $z$  は次で与えられる：

$$z = \int^u v_u x_u du. \quad (11)$$

逆に、上のように定義された Wulff shape  $\mathcal{W}$  に対して  $x$  と  $z$  を (i) ~ (iii), (11) のように定義すれば、 $X(s, \theta) = (x(s)e^{i\theta}, z(s))$  は

$$2\mu_2^{-1} z_s x + \Lambda x^2 = c$$

を満たす非等方的 Delaunay 曲面である。ただしここで、 $s$  は  $(x, z)$  の弧長であり、(i) の場合は  $\Lambda = 0$  とみなす。さらに、 $X$  は  $\mathcal{W}$  と同じだけの微分可能性をもつ。

## 5 非等方的平均曲率一定曲面に対する自由境界問題

本節では、平行な 2 平面上に自由境界をもつ安定な非等方的平均曲率一定曲面に関する一意性定理 ([7]) について述べる。

第 4 節と同様、 $F = F(\nu_3)$  とする。さらに、簡単のため  $F$  は偶関数  $F(\nu_3) = F(-\nu_3)$  とする。  $\Pi_1, \Pi_2$  を水平な 2 平面  $\{z = \text{定数}\}$  とし、  $\Pi_1 \cup \Pi_2$  で囲まれる閉領域を  $\Omega$  とする。  $\Pi_1 \cup \Pi_2$  上に自由境界をもつ曲面  $X : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (\mathbf{R}^3, \Pi_1 \cup \Pi_2)$  を考えるとき、 $X$  の体積  $V[X]$  は

$$V[X] := \int_{\Sigma} x_1 \nu_1 d\Sigma (= \int_{\Sigma} x_2 \nu_2 d\Sigma)$$

と定義するのが自然である。  $V[X]$  は  $X(\Sigma) \cup \Pi_1 \cup \Pi_2$  が「囲む」3次元の代数的体積である。なお、  $V(X)$  と  $V[X]$  の第1変分は一致する。

実数  $V_0$  に対して、はめ込みの空間

$$\mathcal{S} := \{X : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (\mathbf{R}^3, \Pi_1 \cup \Pi_2) \mid V[X] = V_0\}$$

における  $\mathcal{F}_0$  の臨界点について考える。これが、我々の自由境界問題である。  $X \in \mathcal{S}$  が臨界点であるための必要十分条件は、  $X$  が非等方的平均曲率一定かつ境界上  $\Pi_1 \cup \Pi_2$  と直交することである。

さて今、Wulff シェイプ  $\mathcal{W}$  の母線  $C$  の長さを  $4L$  とし、  $C$  を弧長  $\sigma$  によって

$$(u(\sigma), v(\sigma)), \quad -2L \leq \sigma \leq 2L$$

と表す。

$$u(0) = \max u(\sigma), \quad \begin{cases} v(\sigma) > 0, & 0 < \sigma < 2L, \\ v(\sigma) < 0, & -2L < \sigma < 0 \end{cases}$$

としてよい。  $C$  の内向き法線ベクトルに対する曲率  $\kappa \geq 0$  に対する条件

$$\begin{cases} \kappa'(\sigma) \geq 0, & 0 < \sigma < L, \\ \kappa'(\sigma) \leq 0, & -L < \sigma < 0 \end{cases} \quad (12)$$

を考える。このとき、次の結果が証明される。

**Theorem 5.1**  $F = F(\nu_3)$  は遇関数とする。  $X : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (\mathbf{R}^3, \Pi_1 \cup \Pi_2)$  を非等方的 Delaunay 曲面とすると、  $X$  は、Wulff シェイプ  $\mathcal{W}$  の上または下半分、または、鉛直な円柱または非等方的 unduloid または非等方的 nodoid の一部である。

(i)  $X$  が  $\mathcal{W}$  の上または下半分ならば、  $X$  は安定である。

(ii)  $X$  が円柱のとき、  $X$  が安定なのは、

$$\frac{\mu_1(0)|\Lambda|}{R} \leq (\pi/h)^2$$

が成り立つときかつそのときに限る。ただしここで、  $\mu_1^{-1} = (1 - \nu_3^2)(d^2F/d\nu_3^2) + \mu_2^{-1}$  であり、  $R, h$  はそれぞれ  $X$  の半径と高さである。

(iii)  $X$  が非等方的 nodoid の一部ならば、  $X$  は不安定である。

(iv)  $X$  は非等方的 unduloid の一部であるとする。  $\mathcal{W}$  の母線  $C$  は、  $u^2 + \Lambda c \geq 0$  を満たす部分で条件 (12) を満足するとする。このとき  $X$  は不安定である。

一方、方程式  $\Lambda = \text{定数}$  が楕円型であることから、Alexandrov 鏡映法が適用できて、次の結果を得る。

**Theorem 5.2**  $F = F(\nu_3)$  とする。  $X$  は非等方的平均曲率一定の埋め込まれた閉曲面、または我々の自由境界問題の埋め込まれた解  $(\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (\Omega, \Pi_1 \cup \Pi_2)$  とする。このとき、  $X$  は鉛直線を回転軸とする種数 0 の回転面である。特に、  $X$  が閉である場合は、  $X(\Sigma)$  は (平行移動と相似変換を除き) Wulff シェイプである。

Theorems 5.1, 5.2 から次の結果を得る。



**Corollary 5.1**  $F = F(\nu_3)$  は偶関数とする.  $\mathcal{W}$  の母線  $C$  は条件 (12) を満足するとする. このとき,

(i) 我々の自由境界問題の埋め込まれた解  $(\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (\Omega, \Pi_1 \cup \Pi_2)$  であって安定なものは, Wulff シェイプの上半分, 下半分, 及び十分短い円柱のみである.

(ii) 我々の自由境界問題の回転対称解  $(\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (\mathbf{R}^3, \Pi_1 \cup \Pi_2)$  であって安定なものは, Wulff シェイプの上半分, 下半分, 及び十分短い円柱のみである.

**Remark 5.1** 平均曲率一定曲面の場合は,  $F$  も  $\kappa$  も定数である. したがって, Corollary 5.1 (i) は, [1] と [12] によって得られた平均曲率一定曲面に対する自由境界問題の安定解についての一意性定理の一般化になっている. 証明の方法は, [1] も [12] も我々の方法もすべて異なる.

また, [1] と [12] は平行な 2 平面で囲まれる閉領域に含まれる埋め込まれた解についてのみ考察しており, したがって, 問題は unduloid について考察することに帰着され, nodoid の安定性についての研究はなされなかった.

## References

- [1] Athanassenas, M., A variational problem for constant mean curvature surfaces with free boundary, J. Reine Angew. Math. 377 (1987), 97–107.
- [2] Da Silveira, A. M., Stability of complete noncompact surfaces with constant mean curvature. Math. Ann. 277 (1987), 629–638.
- [3] Federer, H., Geometric Measure Theory, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 153, Springer-Verlag New York Inc., New York 1969.
- [4] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Reprint of the 1998 edition, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [5] Hoffman, D. A., Osserman, R. and Schoen, R., On the Gauss map of complete surfaces of constant mean curvature in  $R^3$  and  $R^4$ . Comment. Math. Helv. 57 (1982), no. 4, 519–531.
- [6] Koiso, M. and Palmer, B., Geometry and stability of surfaces with constant anisotropic mean curvature, *preprint*.
- [7] Koiso, M. and Palmer, B., Stability of anisotropic capillary surfaces between two parallel planes, *preprint*.
- [8] López, F. J. and Ros, A., Complete minimal surfaces with index one and stable constant mean curvature surfaces. Comment. Math. Helv. 64 (1989), 34–43.
- [9] Palmer, B., Constant Mean Curvature Surfaces in Space Forms, Thesis, Stanford University, 1986.

- [10] Palmer, B., Stability of the Wulff shape. Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 3661–3667.
- [11] Taylor, J. E., Crystalline variational problems, Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), 568–588.
- [12] Vogel, T. I., Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes, SIAM J. Appl. Math. 47 (1987), 516–525.